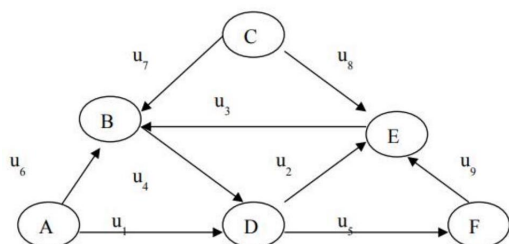


Exercice 1

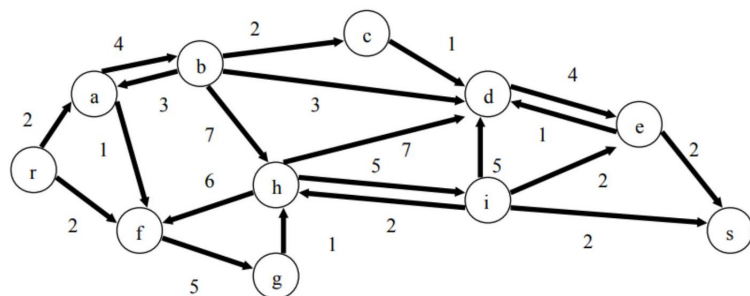
Soit le graphe :



1. En considérant le graphe comme non orienté, donner une chaîne de A à F passant par E sans utiliser deux fois la même arête.
2. En considérant le graphe comme non orienté, donner une chaîne élémentaire de A à F
3. En considérant le graphe comme orienté idem question (1) et (2) avec les chemins et arcs

Exercice 2

Soit le graphe :

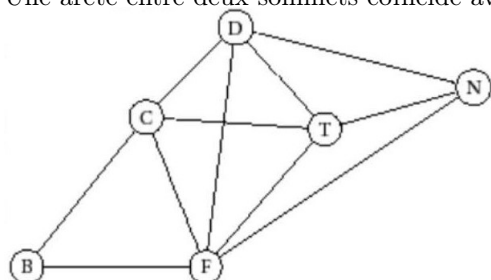


1. Donner les composantes fortement connexes du graphe
2. Donner le graphe réduit (l'arc retenu est l'arc de poids le plus faible).

Exercice 3

Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes. On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer.

Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



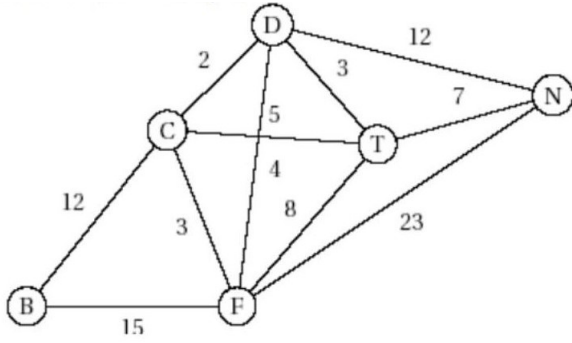
1. a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

- b) Justifier que le graphe est connexe.
- 2) Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin.
Démontrer que leur souhait est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.
- 3) Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.
 - a) Montrer que $4 \leq n \leq 6$
 - b) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.
- 4) Le groupe se trouve au sommet B et souhaite se rendre au sommet N. Les distances en kilomètres entre chaque sommet ont

été ajoutées sur le graphe.

Indiquer une chaîne qui minimise la distance du trajet. Justifier la réponse.



Exercice 4

On considère le graphe orienté $G = (S, A)$ tel que

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$$

1. représenter graphiquement ce graphe,
2. donner le demi-degré extérieur de 2 et le demi-degré intérieur de 4 ,
3. donner les sommets prédécesseurs de 4 et les sommets successeurs de 2 ,
4. donner un graphe partiel et un sous-graphe de ce graphe.

Exercice 5

Dessiner un graphe non orienté complet à 4 sommets. Quel est le degré des sommets de ce graphe ? Combien d'arêtes possède-t-il ? Généralisez ces résultats à un graphe simple complet ayant n sommets.

Exercice 6

On définit une relation R sur l'ensemble des 9 premiers entiers naturels non nuls comme suit :

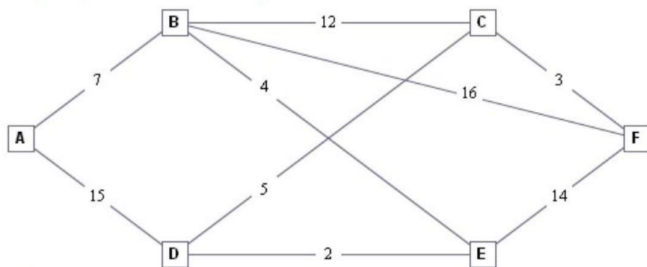
$$xRy \Leftrightarrow x \text{ est un diviseur de } y$$

1. Représentez cette relation par un graphe orienté.
2. Déterminez à partir du graphe l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs.
3. Ajoutez le '0' à votre graphe, et voyez si vos réponses à la question 2 sont toujours valables.

Exercice 7

Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F.

Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



1. Justifier que ce graphe est connexe.
2. Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.
 - a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F .
 - b) En déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F .

Exercice 8

Deux joueurs A et B, amateurs de tennis, décident de jouer une partie toutes les semaines.

- La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7 .
- Si A gagne la partie de la semaine n , il garde la même stratégie de jeu la semaine suivante, et la probabilité qu'il gagne alors la partie de la semaine $(n + 1)$ est seulement de 0,4 .
- Si A perd la partie de la semaine n , il change de stratégie de jeu pour la semaine suivante, et alors, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine $(n + 1)$ est de 0,9 .

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on désigne par A_n l'évènement : «A gagne la partie de la $n^{\text{ème}}$ semaine », par B_n l'évènement : « B gagne la partie de la $n^{\text{ème}}$ semaine », et on note $a_n = p(A_n)$.

Le but de cet exercice est de rechercher la limite de la suite (a_n) , en utilisant deux méthodes différentes.

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par $P_n = (a_n \ 1 - a_n)$ la matrice des probabilités associée à la $n^{\text{ème}}$ semaine.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste, et donner la matrice M de transition associée à ce graphe.

2. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,675 & 0,325 \end{pmatrix}$

Quelle est la probabilité pour que A gagne la partie de la 4^{ème} semaine ?

3. Déterminer la matrice ligne $P = (x, 1 - x)$ telle que $P \times M = P$
4. En déduire la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 9

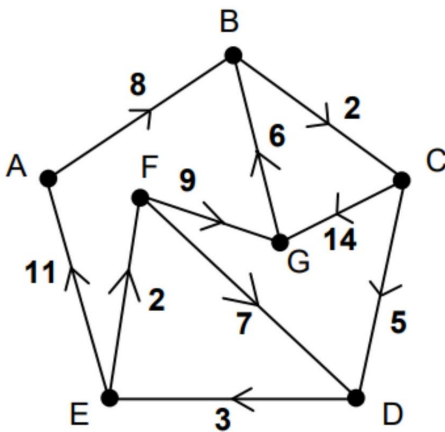
Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation «être diviseur de».

Exercice 10

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

Exercice 11

Donner la matrice d'adjacence



Déterminer le chemin le plus court entre A ET G

Exercice 12

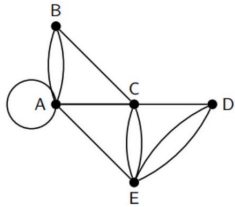
La mise en exploitation d'un nouveau gisement minier demande la réalisation d'un certain nombre de tâches. Le tableau suivant représente ces différentes tâches avec leurs relations d'antériorité.

Tâche	Description	Durée (en jours)	Tâches antérieures
A	obtention d'un permis d'exploitation	120	-
B	établissement d'une piste de 6 km	180	A
C	transport et installation à pied d'œuvre de 2 sondeuses	3	B
D	création de bâtiments provisoires pour le bureau des plans, le logement des ouvriers sondeurs	30	B
E	goudronnage de la piste	60	B
F	adduction d'eau	90	D
G	campagne de sondage	240	C,D
H	forage et équipement de trois puits	180	E,F,G
I	transport et installation au fond du matériel d'exploitation	30	J,H
J	construction de bureaux et logements, ouvriers et ingénieurs	240	E,F,G
K	tracé et aménagement du fond	360	J,H
L	construction d'une laverie	240	J,H

- Déterminez les dates au plus tôt et les dates au plus tard de chaque tâche.
- Déterminez le temps minimum de réalisation de l'ensemble.
(On pourra utiliser ici la méthode des potentiels métra (MPM), Gantt puis la méthode PERT).
- Déterminez les marges de chaque tâche

Exercice 13

Le plan du parcours santé de Grafland est le suivant :



sa matrice d'adjacence peut être :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque arc du plan représente un chemin de 250 mètres. On souhaite effectuer des parcours partant du point A et arrivant au même point A de longueur 1 km . Combien peut-on effectuer de parcours différents ?

Exercice 14

- Donner la formulation Duale équivalente au Primal suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & -5x_1 - 21x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Résoudre graphiquement le problème duale obtenu
- Résoudre le même problème duale en utilisant le simplexe
- En déduire la solution du primal

Exercice 15

Un oléiculteur désire exporter deux types de l'huile d'olive, huile d'olive ordinaire et huile d'olive de haute qualité. Compte tenu des réglementations en vigueur des exportations, il n'a la possibilité de vendre qu'au maximum 5000 litres de l'huile ordinaire et 1000 litres de l'huile de qualité par année. Il propose à ses clients trois types de packs (fardeaux).

a Pack 1 est composé de deux bouteilles (1litre) d'huile simple et de quatre bouteilles d'huile de qualité. La marge brute par pack 1 est de 4 dollar.

b Pack 2 est composé de six bouteilles d'huile de qualité. La marge brute par pack 2 est de 10 dollar.

c Pack 3 est composé de six bouteilles d'huile ordinaire. La marge brute par pack 3 est de 3 dollar.

— Aider cet oléiculteur à savoir combien de pack de chaque type doit-il constituer afin de maximiser son bénéfice annuel ?

Exercice 16

1. Résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll}\min & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ & x \geq 0\end{array}$$

2. Donner la formulation duale de ce problème
3. En déduire la solution du dual